11. Srednjoeuropska matematička olimpijada 2017. g.

MEMO
11TH MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VILNIUS 2017 LITHUANIA

Dana 21. kolovoza 2017. krenuli smo na 11. Srednjoeuropsku matematičku olimpijadu koja se ove godine održavala u Vilniusu u Litvi. Hrvatsku su ove godine predstavljali učenici: *Tea Arvaj*, *Aleksandra Saša Božović*, *Noel Lakić*, *Ivan Sinčić*, *Luka Šimek*, *Tadej Petar Tukara*, suvoditelj *Ivan Kokan* i voditelj *Matija Bašić*. Put smo započeli rano ujutro avionskim letom iz Zagreba za Beč. Nakon kratkog leta vrlo brzo smo presjedali za Vilnius. Nakon nešto dužeg leta došli smo tamo gdje nas je dočekao domaćin-vodič koji nas je odveo do hotela gdje smo bili smješteni. Sljedeći dan je bio obilježen svečanim otvaranjem te izletom koji nam je predstavio ljepote Vilniusa. Ručak smo imali u TV-tornju koji je najviša građevina u Litvi i pogled je bio nezaboravan.

Sljedeće jutro svi se budimo u iščekivanju početka individualnog natjecanja. Rješavali smo četiri zadatka u trajanju od pet sati. Nakon natjecanja dolazi kratko komentiranje naših rješenja s voditeljima. Poslije toga smo išli na još jedan izlet, ovaj put u Trakai, dvorac udaljen tridesetak kilometara nizvodno od Vilniusa. Tamo smo imali priliku okušati se sa streličarstvom te vojnim vještinama pojedinaca u srednjem vijeku. No, sve više smo osjećali da je sljedećeg dana ekipno natjecanje. Poslije napornih pet sati, natjecanje smo završili znajući da smo uspješno riješili 5 od 8 zadataka.

Nakon kratkog komentiranja s voditeljima i drugim ekipama slijedio je . . . još jedan izlet! Ovaj puta smo išli u Muzej energije i tehnologije u Vilniusu. Po završetku natjecanja zabava je mogla početi. Atmosfera je bila mnogo opuštenija i članovi ekipa su se nastavili intenzivnije međusobno družiti. U sljedeća dva dana smo imali još nekoliko izleta. Posjetili smo Kaunas, grad stotinjak kilometara nizvodno od Vilniusa te jedan otvoreni muzej starih kuća Litve. Svima je najuzbudljiviji i najzabavniji bio odlazak u Aqua park.

Posljednje večeri je bila dodjela nagrada te svečana ceremonija zatvaranja olimpijade. Ove godine našu maskotu Mathu Mišu smo okitili s četiri bronce i jednim zlatom. Brončane medalje su osvojili *Aleksandra*, *Ivan*, *Noel* i *Luka*, dok je *Tadej* osvojio zlato. Timska medalja nam je izmakla samo za jedan od 32 boda, ali smo odsrca čestitali Poljacima, Slovencima i Mađarima koji su bili bolji od nas. Tu zadnju noć svi smo ostali budni do kasno zabavljajući se međusobno i družeći se.

U Zagreb smo se vratili u nedjelju 27. kolovoza, istim putem kojim što smo i došli u Litvu. U zračnoj luci su nas dočekali novinari, roditelji i bivši natjecatelji. Ovaj MEMO je svakako bilo lijepo i zanimljivo iskustvo i nadamo se da će sljedeće godine učenici Hrvatske biti još i bolji.

Noel Lakić

Zadatci s pojedinačnog natjecanja, 23. kolovoza 2017.

I-1. Odredi sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da
$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x+y)$$
vrijedi za sve realne brojeve x i y.

I-2. Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj. Označavanje n vrhova, n stranica i unutrašnjosti pravilnog n-terokuta koristeći $2n+1$ različitih cijelih brojeva je *memorabilno* ako vrijede sljedeći uvjeti:

a) Oznaka svake stranice je aritmetička sredina oznaka krajnjih točaka te stranice.

b) Oznaka unutrašnjosti n-terokuta je aritmetička sredina oznaka svih vrhova.

Odredi sve prirodne brojeve $n \geqslant 3$ za koje postoji memorabilno označavanje pravilnog n-terokuta koristeći $2n+1$ uzastopnih cijelih brojeva.

I-3. Neka je $ABCDE$ konveksni peterokut. Neka je P sjecište pravaca CE i BD. Pretpostavimo da vrijedi $\sphericalangle PAD = \sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle CAP = \sphericalangle EDA$. Dokaži da su središta kružnica opisanih trokutima ABC i ADE kolinearna s točkom P.

I-4. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza
$$|2^m - 181^n|,$$
pri čemu su m i n prirodni brojevi.

Zadatci s ekipnog natjecanja, 24. kolovoza 2017.

T-1. Odredite sve parove polinoma (P, Q) s realnim koeficijentima takve da
$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$
vrijedi za sve realne brojeve x i y.

T-2. Odredite najmanju moguću realnu konstantu C takvu da nejednakost
$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqslant C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$
vrijedi za sve realne brojeve x, y, z takve da vrijedi $x + y + z = -1$.

T-3. Na svakom polju ploče 2017×2017 nalazi se žarulja. Svaka žarulja je upaljena ili ugašena. Žarulja je *loša* ako ima paran broj upaljenih susjednih žarulja. Koji je najmanji mogući broj loših žarulja na takvoj ploči?

(Dvije žarulje su susjedne ako njihova pripadna polja dijele stranicu.)

T-4. Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj. Niz $P_1, P_2, \ldots, P_n$ različitih točaka u ravnini je *dobar* ako nikoje tri od njih nisu kolinearne, poligonalna linija $P_1P_2\ldots P_n$ ne siječe samu sebe, te je trokut $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ orijentiran u smjeru suprotnom od kazaljke na satu za svaki $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Za svaki prirodni broj $n \geqslant 3$ odredite najveći mogući prirodni broj k sa svojstvom: postoji n različitih točaka A_1, A_2, $\ldots$, A_n u ravnini za koje postoji k međusobno različitih permutacija $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ takvih da je niz $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}$ dobar.

(Poligonalna linija $P_1P_2\ldots P_n$ se sastoji od dužina $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\ldots$, $\overline{P_{n-1}P_n}$.)

T-5. Neka je ABC šiljastokutni trokut za koji vrijedi $|AB| > |AC|$ i neka je Γ kružnica opisana tom trokutu. Neka je M polovište kraćeg luka $\overset{\frown}{BC}$ kružnice Γ, te neka je D sjecište polupravaca AC i BM. Neka je $E \neq C$ sjecište unutarnje simetrale kuta

ACB i kružnice opisane trokutu BDC. Pretpostavimo da je E unutar trokuta ABC i da postoji sjecište N pravca DE i kružnice Γ takvo da je E polovište dužine $\overline{DN}$.

Dokažite da je N polovište dužine $\overline{I_BI_C}$, pri čemu su I_B i I_C redom središta kružnica pripisanih trokutu ABC nasuprot B i C.

T-6. Neka je ABC šiljastokutni trokut za koji vrijedi $|AB| \neq |AC|$, te neka je Γ kružnica opisana tom trokutu sa središtem O. Tangente kroz B i C na kružnicu Γ sijeku se u točki D, a pravac AO siječe pravac BC u točki E. Neka je M polovište dužine $\overline{BC}$ i neka pravac AM siječe kružnicu Γ drugi put u točki $N \neq A$. Konačno, neka je $F \neq A$ točka na kružnici Γ takva da su točke A, M, E i F konciklične. Dokažite da pravac FN raspolavlja dužinu $\overline{MD}$.

T-7. Odredite sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$ za koje postoji permutacija $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}$ brojeva 0, 1, ..., $n-1$ takva da n brojeva

$$x_0,\ x_0 + x_1,\ \ldots,\ x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

daje međusobno različite ostatke pri dijeljenju s n.

T-8. Za prirodni broj $n \geqslant 3$ definiramo niz $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ kao niz eksponenata u rastavu $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, pri čemu su brojevi $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ prosti.

Odredite sve prirodne brojeve $n \geqslant 3$ takve da je $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ geometrijski niz.

58. Međunarodna matematička olimpijada 2017. g.

Na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi u Rio de Janeiru šesteročlana hrvatska ekipa pod vodstvom *Mee Bombardelli* i *Ivana Krijana* ostvarila je 35. mjesto od ukupno 111 država. Ekipa je izabrana temeljem rezultata Hrvatske matematičke olimpijade i činili su ju: *Adrian Beker*, *Lugo Mihovilić*, *Petar Nizić-Nikolac*, *Lukas Novak*, *Borna Šimić*, *Marin Varivoda*. Prije olimpijade sudjelovali su na pripremama na Fakultetu elektrotehnike i računalstva od 5. do 20. lipnja i u Ogulinu početkom srpnja.

Rio de Janeiro je bio ugodan, s toplih, ali ne prevrućih 25 °C u zimskom dijelu godine te s mnogo toga za vidjeti, osjetiti i doživjeti. Ceremonija otvaranja je prošla u opuštenom brazilskom duhu sa sambom, klaunovima i maskotom Aramatom.

Dan prije natjecanja smo proveli ponavljajući ideje i metode iz poučnih zadataka koje smo prošli tokom svih naših priprema, a također smo svi zajedno razmijenili iskustva i savjete kako pristupiti zadatcima na natjecanju poput IMO-a. Također, imali smo i prilike ići pogledati dvoranu u kojoj ćemo rješavati zadatke na samom natjecanju te isprobati stol za kojim ćemo sjediti.

Prvi dan natjecanja sastojao se iz teorije brojeva na prvom zadatku, algebre, tj. funkcijske jednadžbe na drugom i kombinatorikom na trećem. Prvi zadatak nam je svima bio lagan i skoro svi smo ga u potpunosti riješili i dobili skoro sve bodove na njemu. Drugi zadatak je tražio podosta vremena da se riješi, ali usprkos tome smo svi uspjeli izvući neke bodove. U potpunosti ga je jedino riješio Petar, Lukas je skupio 6 bodova, Adrian 4, Borna i Marin svako po 3 i Lugo 2. Na trećem zadatku nitko iz ekipe nije osvojio ni bod.

Drugi dan natjecanja se sastojao od geometrije na četvrtom zadatku, kombinatorike na petom i teorije brojeva na šestom. Drugi dan je bio dosta zahtjevan. Zadatci su bili